

## Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Ungleichungen:

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ .
- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 10$  gilt  $2^n > n^3$ .
- Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq x \leq 1$  und für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$ .

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- Für alle  $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$  und  $b \in \mathbb{N}$  gilt:  $(b \mid a_1 \wedge b \mid (a_1 + a_2)) \implies b \mid a_2$ .
- Für alle  $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$  und  $b \in \mathbb{N}$  gilt:  $(b \mid a_1 \vee b \mid a_2) \implies b \mid (a_1 \cdot a_2)$ .
- Für alle  $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$  und  $b \in \mathbb{N}$  gilt:  $b \mid (a_1 \cdot a_2) \implies (b \mid a_1 \vee b \mid a_2)$ .

3. Man beweise die folgenden Teilbarkeitsaussagen für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :

- $3 \mid (4n^3 - n)$ .
- $4 \mid (5^n + 7)$ .
- $6 \mid (a^{2n+1} - a)$  für alle  $a \in \mathbb{N}_0$ .

4. In einer Gemeinde in Niederbayern gibt es  $n$  Dörfer  $D_1, \dots, D_n$ , die jeweils durch eine Straße verbunden sind. (Es gibt also zwischen jedem beliebigen Paar von Dörfern genau eine Verbindungsstraße.)

Wegen Bauarbeiten sind aber derzeit alle Straßen Einbahnstraßen. Beweisen Sie:

Es gibt dann dennoch immer noch ein Dorf, von der aus man in alle anderen Dörfer gelangen kann. (Dabei darf man natürlich auch andere Wege als den direkten Weg nehmen, solange man nicht falsch herum durch eine Einbahnstraße fährt!)

*Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion durch, bei der Sie  $n \geq 2$  betrachten. Am Fall von  $n = 3$  oder  $n = 4$  können Sie sich klarmachen, wie der Induktionsschluß funktionieren könnte.*

**Für die Tutorien vom 8.1. bis 10.1.20**